



**HAL**  
open science

## Le “ Mountain Pass Theorem ”

Daniel Parrochia

► **To cite this version:**

| Daniel Parrochia. Le “ Mountain Pass Theorem ”. 2022. hal-03779636

**HAL Id: hal-03779636**

**<https://hal.science/hal-03779636>**

Preprint submitted on 17 Sep 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le « Mountain Pass Theorem »

Daniel Parrochia

*De la sente au col (ou le « Mountain Pass Theorem »)*

La sente (latin *semita*, de *se-* (« à part ») et du radical *\*mi*, de *meo* (« aller ») a plus à voir avec la trame, le chemin de traverse, qu'avec le sentir ou les sensations. Ce qui m'intéressera ici ne sera donc pas quelque énième variation heideggerienne ou rilkéenne sur les sentes qui se perdent<sup>1</sup>, celles qui sont touffues ou odorantes (sentes « enverdurées » de Mirbeau<sup>2</sup>, sentes « folles » de Huysmans<sup>3</sup>, sentes bordées de joncs, de fondis ou de ronciers de Pourrat<sup>4</sup>...). Oublions également un instant les vieux poncifs (la sente féminine face au sentier masculin...).

Ce qui va m'occuper est un théorème de mathématiques pures – le « Mountain Pass Theorem » (ou MPT)<sup>5</sup> – dont le point de départ intuitif est une situation connue de tous les randonneurs, lesquels, sauf à rechercher l'exploit, tendent généralement à minimiser leur peine. J'ai déjà eu ailleurs l'occasion de mettre en évidence quelque parenté entre les mathématiques et la montagne<sup>6</sup>, via notamment des questions d'optimisation comme celle du « sac à dos », objet dont on veut minimiser le poids tout en maximisant l'utilité du contenu : ce problème connaît une généralisation en algorithmique sous forme du « sac à dos multidimensionnel », où des contraintes multiples doivent être prises en compte.

Cette fois-ci, il ne s'agira plus de mathématiques discrètes, mais d'Analyse. Je prolongerai ici les considérations précédentes par des réflexions qui prennent leur source dans cette partie des mathématiques qu'on appelle le calcul des variations.

Donnons-nous un paysage montagneux avec ses sommets plus ou moins élevés, et supposons que, partant d'un point bas, nous voulions suivre un chemin (ou sente) qui permette d'atteindre à moindre frais une vallée par delà des montagnes qu'il faut donc traverser (voir Fig. 1, un site au-dessus de Monétier-les-Bains).

---

<sup>1</sup> M. Heidegger, *Chemins qui ne mènent nulle part* (Holzwege), tr. fr. Paris, Gallimard, 1962; cf. R. M. Rilke, « Les quatrains valaisans », in *Vergers, suivi d'autres poèmes français*, Paris, Gallimard, 1978, n°31, p. 117.

<sup>2</sup> O. Mirbeau, *Le tripot aux champs*, Le Journal, 27 septembre 1896.

<sup>3</sup> J. K. Huysmans, *La Cathédrale*, Plon-Nourrit, 1915.

<sup>4</sup> H. Pourrat, *Gaspard des Montagnes*, 1922, Éditions Albin Michel, 2006, 3<sup>e</sup> pause.

<sup>5</sup> A. Ambrosetti et P. H. Rabinowitz, « Dual variational methods in critical point theory and applications », *J. Funct. Anal.* 14 (1973), p. 349-381.

<sup>6</sup> D. Parrochia, *Le cas du K2*, Paris, Le Corridor Bleu, 2<sup>e</sup> ed. 2018.



Fig. 1 : Le chemin du lac des Cerces au col de la Ponsonnière

Si on modélise la situation, on dira que  $J(u)$  représente l'altitude dans  $\mathbf{R}^3$ , l'espace réel à trois dimensions<sup>7</sup>, d'un point  $u$ . On supposera très généralement que :

- (1)  $J(0) = 0$  (altitude zéro au point origine);
- (2) Il existe  $r > 0$  et  $a > 0$  tels que, si  $u$  est à une distance  $r$  de l'origine dans l'espace concerné  $V$  (ici l'espace  $\mathbf{R}^3$ ), alors  $J(u) \geq a$  (on part d'un point d'altitude au moins  $a$ ).

Introduisons maintenant une troisième condition :

- (3) Il existe  $v$  dans ce même espace  $V$ ,  $v$  étant supérieur à  $r$ , tel que  $J(v) < a$ .

Autrement dit, la condition (3) stipule qu'au-delà des montagnes existe un point strictement moins haut que le point de départ, disons dans la vallée qu'on veut rejoindre.

Si ces trois conditions sont satisfaites, ainsi qu'une quatrième nommée «condition de Palais-Smale», de laquelle je ne dirai rien pour l'instant si ce n'est qu'elle restreint le nombre des chemins possibles, alors on peut appliquer le théorème suivant (qui vaut en dimension quelconque, y compris infinie) :

---

<sup>7</sup> Mathématiquement, pour être tout à fait correct, il faudrait d'abord définir l'espace vectoriel des applications de  $\mathbf{R}^3$  dans l'ensemble des réels (on l'appelle  $C^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{R})$ ) et dire que  $J$  est en fait une « fonctionnelle » de cet espace. Une fonctionnelle, en mathématiques est une application d'un espace vectoriel – généralement un *espace vectoriel de fonctions* – vers son corps de scalaires.  $C^1(X, Y)$  est, d'une manière générale, l'espace des applications de  $X$  dans  $Y$  continûment différentiables au sens de Fréchet.

**Théorème de passe montagne (ou du col) ou encore «Mountain Pass theorem» :**  $J$  admet une valeur critique  $c \geq a$ , autrement dit, il existe un point critique de  $J$  tel que  $J(u) = c$  et où sa différentielle s'annule.

Ce qui signifie en clair : on peut joindre continûment  $a$  à  $v$  en passant par un col de montagne et une construction min-max nous dit comment faire : il suffit de regarder l'altitude maximale atteinte sur chaque chemin (ou sente) et d'en choisir un(e) qui minimise cette altitude maximale (voir un exemple Fig. 2).



Fig. 2 : Différents chemins possibles autour d'un minimal

Un candide trouvera sans doute la chose assez plaisante : s'il existe toujours un col entre deux montagnes permettant de passer d'une vallée à une autre sans aucun problème, cela signifie non seulement qu'un grimpeur n'aura jamais à rebrousser chemin dans une course, mais aussi qu'un politique pourra désenclaver toutes les parties d'un territoire et un diplomate résoudre toutes les difficultés d'entente entre les peuples. Il faut tempérer cet enthousiasme car, concrètement, non seulement on peut mettre beaucoup de temps à trouver le col en question (qui peut être à une altitude très élevée), mais les conditions qu'il faut satisfaire pour qu'il ait une existence avérée ne sont pas toujours réunies d'un point de vue mathématique.

### *La condition de Palais-Smale*

Une condition problématique, en particulier, est celle de Palais-Smale. Elle affirme grosso modo (je simplifie) que si on part d'un espace  $V$  qui a de bonnes propriétés pour faire exister des fonctions parce que les séries y convergent (on appelle cela un espace de Banach) et d'une application  $J: V \rightarrow \mathbf{R}$ , alors de toute suite  $u_n$  de valeurs critiques de  $J$  on peut extraire une suite convergente. Cela permet, comme on l'a dit, de poser des restrictions sur les chemins possibles qui, sinon, pourraient se diversifier à l'infini (une autre façon de se perdre à laquelle n'avaient sans doute pas pensé Rilke et Heidegger).

Quand cette condition n'est pas vérifiée, le théorème «passe montagne» n'est pas forcément vrai. Il peut pourtant encore l'être quand  $V = \mathbf{R}$  (par le théorème des valeurs intermédiaires et celui de Rolle). En revanche il est faux quand  $V = \mathbf{R}^2$ , c'est-à-dire qu'il peut, dans ces cas-là, ne pas exister de col car la borne inférieure de l'altitude maximale sur les chemins n'est pas atteinte.

Dans le cas où la condition de Palais-Smale n'est pas vérifiée, il est cependant possible de prouver des théorèmes de type «passe montagne» qui ne pourraient pas être obtenus à partir du théorème canonique d'Ambrosetti-Rabinowitz ou de ses généralisations<sup>8</sup>. Mais il faut, pour cela, se placer, non dans le cadre de l'Analyse classique, mais dans celui de l'Analyse non-standard développée par Abraham Robinson<sup>9</sup>, où on ajoute au corps  $\mathbf{R}$  des réels des infiniment grands et des infiniment petits, créant ainsi le surcorps  $\mathbf{R}^*$ .

### *Le mathématicien, l'alpiniste et les limites*

On observera pour finir que le théorème «passe montagne» est à la fois très général et très utile (car il permet d'obtenir des points critiques). Or trouver des points critiques en mathématiques est l'équivalent de résoudre un problème aux limites. En Analyse, un problème aux limites se présente sous la forme d'une équation différentielle (ou plus généralement aux dérivées partielles) dont on veut obtenir une solution en tenant compte de valeurs imposées en des limites particulières du domaine de résolution. De ce fait, les problèmes aux limites sont souvent des problèmes difficiles, et dont la résolution peut chaque fois conduire à des considérations différentes.

En ce sens, le «Mountain Pass Theorem», qui rend manifeste l'existence de cols en dimension quelconque, amène à considérer le mathématicien comme un montagnard évoluant dans un espace abstrait (éventuellement infini-dimensionnel), dont les montagnes réelles (polytopes ou pyramides de l'espace à trois dimensions) ne sont, malgré leur complexité et les problèmes qu'elles posent à celui qui veut les gravir, que des figures relativement triviales.

Mais évoluer sur les pentes d'hypersurfaces  $n$ -dimensionnelles au fil de leurs points critiques est une activité particulièrement complexe et de l'ordre d'un superalpinisme intellectuel. On peut évidemment voir les choses à l'envers : l'alpiniste est une sorte de mathématicien concret résolvant des problèmes aux limites,

---

<sup>8</sup> Depuis l'énoncé du théorème en 1973, diverses généralisations en ont été proposées, reposant en général sur un affaiblissement de la condition de Palais-Smale. Voir là-dessus : M. R. Grossinho and S. A. Tersian, *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, 2001. Voir également : Y. Jabri, *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 2011.

<sup>9</sup> N. Martins, «Mountain Pass Theorem without Palais-Smale conditions», *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 161, No. 6, 2009, p. 783-791. Cf. A. Robinson, «Nonstandard analysis», *Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A*, 64, 1961, p. 432-440. Et le livre publié plus tard : A. Robinson, *Non standard Analysis*, Amsterdam, North Holland, 1966.

mais aussi capable, au surplus, d'éprouver toutes les sensations de la montagne (et qu'on n'a pas dans un bureau), par exemple celle du froid. On en conclura que, quand on part en altitude, il vaut mieux ne pas oublier son passe-montagne (le couvre-chef), sûrement plus utile, en l'occurrence, que le théorème d'Ambrosetti-Rabinowicz.

### *Petite histoire des problèmes min-max*

Le «Mountain Pass Theorem» s'inscrit dans une longue histoire où se côtoient non seulement les montagnards, mais aussi les éleveurs. La légende raconte que lorsque la reine carthaginoise Didon parvint au nord de l'Afrique, un chef local lui offrit autant de terres que pouvait en contenir une peau de bœuf. Comme le raconte avec humour Hazhar Ghaderi<sup>10</sup>, on ne peut qu'imaginer la tête du chef quand il découvrit que le cuir de bœuf avait été coupé en longs fils minces, réunis par les extrémités et posés sur le sol sous la forme d'un arc de cercle qui, en combinaison avec la ligne de rivage, formait la terre désirée. Suivant son intuition, la reine Didon avait choisi un arc de cercle pour maximiser le gain.

Quelque 2700 ans plus tard, Jacob Steiner a tenté de prouver sans vraiment y parvenir l'affirmation selon laquelle, s'il existe une figure  $\Gamma$  dont l'aire n'est jamais inférieure à celle d'une autre figure de même périmètre, alors  $\Gamma$  est un cercle. Un peu plus tard, Dirichlet a, quant à lui, rencontré un problème voisin : étant donné un ensemble borné ouvert du plan et une fonction continue  $\phi$  de la frontière de ce domaine dans  $\mathbf{R}$ , trouver une valeur limite pour cette fonction. Il pensait, comme déjà C. F. Gauss et Lord Kelvin que la question pouvait être réduite au problème de la minimisation de l'intégrale pour le domaine donné et les fonctions admissibles prenant des valeurs spécifiques sur sa frontière. Portés à croire en l'existence d'une solution pour ce dernier problème (l'intégrale est positive), les mathématiciens avaient cru également en l'existence d'une solution au problème de la valeur limite.

Dès l'instant que l'intégrale était bornée par le bas, l'existence d'un *infimum* semblait garanti. Mais les mathématiques – et la montagne – sont souvent subtiles : un *infimum* n'est pas nécessairement un *minimum* (les sentes, qui mènent à des sommets plus ou moins hauts, conduisent aussi à des vallées plus ou moins basses). Quelque temps plus tard, Weierstrass exhiba d'ailleurs le contre-exemple d'une intégrale positive n'atteignant pas son minimum. Le résultat de Dirichlet fut néanmoins récupéré par D. Hilbert et récemment lié au MPT, tous deux étant des applications d'un principe plus général, le principe variationnel d'I. Ekeland<sup>11</sup>.

Ainsi s'enchaînent les idées qui, partant de la montagne et passant par la peau d'un bœuf, aboutissent à un outil heuristique pour le calcul des variations – un calcul que, finalement, le grimpeur suivant sa sente pratique souvent sans le savoir.

---

<sup>10</sup> H. Ghaderi, «Mountain Pass Theorems with Ekeland's Variational Principle and an Application to the Semilinear Dirichlet Problem», *Examensarbete i matematik, 15 hp Handledare och examinator: Michael Melgaard*, Department of Mathematics, Uppsala University, Décembre 2011.

<sup>11</sup> I. Ekeland, «On the variational principle», *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 47, 1974, p. 324-353.