



HAL
open science

Sur quelques formules de Ramanujan

Daniel Parrochia

► **To cite this version:**

| Daniel Parrochia. Sur quelques formules de Ramanujan. 2020. hal-02615049

HAL Id: hal-02615049

<https://hal.science/hal-02615049>

Preprint submitted on 22 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur quelques formules de Ramanujan

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

Résumé. Nous étudions et tentons d'expliquer la genèse de quelques formules de fractions continues de Ramanujan, que l'auteur a présentées sans démonstration, et sans qu'on puisse savoir comment il a pu les obtenir.

Key words. Théorie des nombres, Ramanujan, Hardy, formules de Rogers-Ramanujan.

1 Une formule reliant ϕ , π et e

Dans l'annexe à la première des deux lettres que Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920), mathématicien indien quasiment autodidacte, envoie en 1913 à Godfrey Harold Hardy (1877-1947), professeur au Trinity College de Cambridge et spécialiste de théorie des nombres, figure, parmi des dizaines d'autres, une formule extraordinaire qui prend la forme suivante ([Berndt 95], 25),

$$e^{-2\pi/5} + \frac{e^{-2\pi}}{1+} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \frac{e^{-6\pi}}{1+} \dots = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (1)$$

dans laquelle Ramanujan utilise l'expression habituelle abrégée des fractions continues :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \dots := b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \quad (2)$$

Sous sa forme développée, la formule de Ramanujan peut donc être encore écrite de la façon suivante :

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{+1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \dots}}}}} \quad (3)$$

Cette formule était présentée sans démonstration, mais, comme l'écrivait Hardy en 1937, elle devait être vraie car, si elle était fausse, personne n'aurait eu assez d'imagination pour l'inventer. Elle faisait partie de celles dont il ne voyait pas du tout d'où elles pouvaient venir :

«The formulas (...) defeated me completely; I have never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them.» (voir [Hardy 1937], 144).

Aux yeux exercés d'un mathématicien, en effet, l'expression est celle d'une fraction continue établissant un lien entre trois constantes mathématiques apparemment sans rapport : ϕ , π et e .

Les deux dernières avaient toutefois été déjà mises en relation dans la célèbre formule d'Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$), où elles s'articulaient également avec trois autres nombres importants en mathématiques, l'imaginaire i , le nombre 1, élément neutre de la multiplication, et 0, l'élément neutre de l'addition.

La nouveauté ici était la présence de ϕ , le célèbre nombre d'or¹ des Pythagoriciens, qui apparaît deux fois dans le membre gauche de (3) (resp. dans le membre droit de (1)). En effet, on sait que :

1. Nombre mystique découvert en même temps que les irrationnels, le nombre ϕ a, comme on sait, des propriétés particulières. On vérifie facilement, en particulier, que :

$$\phi^2 = \phi + 1$$

ou que :

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad (4)$$

et un calcul simple permet aussi de poser :

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\phi\sqrt{5}} = \sqrt{\phi + 2} \quad (5)$$

2 Quelques variantes de la formule et leur utilité

Les différentes écritures de ϕ , comme, surtout les variantes qu'on peut trouver de la formule de Ramanujan dans ses carnets, font que celle-ci, en réalité, se démultiplie. Ces différentes formules de fractions continues, de même nature, permettent alors d'approcher différents nombres. Au départ, on a :

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 0,2840790438404122960... \quad (6)$$

Mais des formules proches permettent également de mettre en évidence des nombres presque entiers, proches de 1. Ainsi, on a :

$$\left(\sqrt{\phi\sqrt{5}} - \phi\right)e^{\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{+1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \dots}}}}} = 0,9981360456... \quad (7)$$

ou encore :

$$\frac{e^{-\frac{2\pi}{5}}}{\sqrt{\phi\sqrt{5}} - \phi} = 1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \dots}}}} = 1,001867435... \quad (8)$$

Ces formules apparaissent, elles aussi, dans les travaux de Ramanujan, mais ne reçoivent pas plus de démonstration que la première.

3 Les fractions continues généralisées

À la vérité, une petite investigation historique prouve que la formule (1) de Ramanujan, n'est pas aussi inédite qu'on pourrait croire, bien que Ramanujan, incontestablement, l'ait retrouvée tout seul.

On connaissait depuis les Grecs cette propriété remarquable du nombre ϕ qui est qu'on peut l'approcher par la fraction continue – bien connue :

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = 1,618033988\dots \quad (9)$$

En 1894, un mathématicien britannique, Léonard James Rogers (1862-1933) (voir [Rogers 94], 329), travaillant sur l'expansion de certains produits infinis, avait construit une sorte de généralisation de la formule (9) associée à l'approximation du nombre d'or, sous la forme de la fraction continue suivante :

$$F = 1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^4}{1 + \dots}}} \quad (10)$$

où le n -ème numérateur de (9) est remplacé par q^n , $0 \leq n < \infty$.

Plus précisément, pour $|q| < 1$, on définit aujourd'hui ce qu'on appelle la «fraction continue de Rogers-Ramanujan» par :

$$R(q) := q^{1/5} + \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \frac{q^3}{1+\dots} = q^{1/5} + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \dots}}} \quad (11)$$

Dans des articles récents (voir [Berndt 99] et [Berndt 00]), Berndt (et al.) ont défini également :

$$S(q) := -R(-q) \quad (12)$$

ainsi que :

$$K(q) := 1/R(q) \tag{13}$$

et montré qu'on pouvait poser, pour $|q| < 1$:

$$G(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} \quad \text{and} \quad H(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_n}, \tag{14}$$

formules dénotant ce qu'on nomme désormais les «fonctions de Rogers-Ramanujan», dans lesquelles :

$$(a; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) \tag{15}$$

et où, pour la suite :

$$(a; q)_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n, \quad |q| < 1, \tag{16}$$

Rogers avait prouvé le résultat :

$$q^{-1/5} R(q) = \frac{G(q)}{H(q)}. \tag{17}$$

On a également les identités connues depuis sous le nom d'«identités de Rogers-Ramanujan» :

$$G(q) = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} \quad \text{and} \quad H(q) = \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}}, \tag{18}$$

de sorte qu'en combinant (17) et (18), on obtient l'élégante formule :

$$R(q) = q^{1/5} \frac{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}}. \tag{19}$$

Force est de constater qu'environ vingt ans après Rogers, mais dans l'ignorance totale de ses travaux (comme d'ailleurs, a fortiori, des formalismes que nous venons d'introduire en suivant [Berndt 99]), Ramanujan a néanmoins mentionné des formules

qui découlent de sa théorie et qui sont celles que l'on trouve dans les deux premières lettres qu'il a écrites à Hardy (voir [Ramanujan 62], pp. xxvii, xxviii; [Berndt 95], pp. 21-30, 53-62).

Les formules de Ramanujan se ramènent en fait à des affirmations au sujet de $R(q)$. On notera également que, dans ses cahiers (voir [Ramanujan 57]) et dans ses «cahiers perdus» (voir [Ramanujan 89]), Ramanujan a, de même, enregistré sans preuves de nombreuses autres évaluations et théorèmes sur $R(q)$.

Ce qu'on appelle «le cahier perdu» de Ramanujan, en particulier, contient énormément de matériel sur la question, mais beaucoup de résultats qui n'ont pu être établis pour la première fois rigoureusement que tout récemment.

Comment Ramanujan a-t-il pu parvenir à des expressions mathématiques dont il ne savait dire, en fait, ni comment elle lui venaient, ni ce qui pouvait, mathématiquement, les justifier ?

4 Complexité de la théorie sous-jacente

La chose est d'autant plus surprenante que la théorie sous-jacente, comme on a commencé de le voir, est assez complexe, et elle a été d'ailleurs la source, depuis, de nombreuses extensions.

Ainsi que le montre en particulier [Berndt 99], la fraction continue de Rogers-Ramanujan possède une théorie à la fois belle et riche, et qui contient des résultats aussi fascinants que surprenants. On ne la développera pas dans cet article, mais on peut quand même en donner quelque idée et montrer quelques-uns de ses progrès récents.

Parmi bien d'autres résultats, on sait, par exemple, aujourd'hui avec certitude que, d'après des théorèmes standards bien connus (voir [Lorentzen 92] pp. 57, 151, 273), $R(q)$ converge pour $|q| < 1$. On pouvait sans doute déjà facilement déduire – de l'existence de la formule d'approximations du nombre d'or ou de celle de son dual $(\phi' = (\sqrt{5} - 1)/2))^2$ – que $R(q)$ convergerait pour $q = \pm 1$. Mais on discute également

2. Cette formule se calcule très aisément. En posant $\phi' = 1 - 1/a$, $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, on déduit facilement la fraction continue :

$$1 - \frac{1}{1+} \frac{1}{1-} \frac{1}{1+} \dots := 1 - \frac{1}{+1 - \frac{1}{+1 - \frac{1}{+1 - \dots}}}$$

désormais des valeurs de $R(q)$ pour d'autres points du cercle $|q| = 1$, et on examine aussi ses approximations pour $|q| > 1$.

Divers raffinements sont également intervenus depuis les premières formules de Ramanujan ou celles qui figurent dans ses «cahiers perdus».

Il est clair qu'en son temps, Ramanujan s'était surtout employé à trouver des formules exactes de $R(q)$ pour $R(e^{-2\pi/n})$ et $S(e^{-\pi\sqrt{n}})$, et uniquement pour les valeurs rationnelles positives de n . Les formules données dans sa première lettre à Hardy, datée du 16 janvier 1913 (voir [Ramanujan 62], p. xxvii), [[Berndt 95], p. 29) en témoignent, puisque elles reviennent à énoncer, dans une écriture moderne que :

$$R(e^{-2\pi}) = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad (20)$$

et que :

$$S(e^{-\pi}) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (21)$$

On notera au passage que ces formules présentées en 1913, malgré la découverte des travaux de Rogers en 1917, n'ont été établies rigoureusement pour la première fois que seize ans plus tard, par un certain George Neville Watson (1886-1965) (voir [Watson 29¹]), excellent mathématicien anglais, célèbre pour un fameux cours d'analyse qu'il écrivit avec Whittaker (1902) et connu pour avoir travaillé sur des sujets difficiles comme les fonctions de Bessel ou d'autres formules sybillines de Ramanujan.

Dans la seconde lettre que ce dernier avait écrite à Hardy le 20 février 1913, il proposait également (voir [Ramanujan 62], p. xxviii; [Berndt 95], p. 57) la valeur suivante pour $R(e^{-2\pi\sqrt{5}})$:

$$R(e^{-2\pi\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{3/4}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{5/2} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad (22)$$

formule également prouvée par Watson (voir [Watson 29²]) en cette même année 1929.

Ramanujan affirmait aussi sans justification, dans les deux mêmes lettres datées de 1913 (voir [Ramanujan 62], p. xxvii ; [Berndt 95], p. 29 et p. 57), que $R(e^{-2\pi i\sqrt{n}})$ pouvait être évalué si n était n'importe quelle quantité positive rationnelle – une pure affirmation, également non démontrée, à l'époque.

C'est seulement dans un article de 1999 (voir [Berndt 99]) que Berndt (et al.) ont fourni une interprétation précise de cette affirmation et énoncé quelques théorèmes donnant un moyen de déterminer explicitement $R(e^{-2\pi\sqrt{n}})$ et $S(e^{-\pi\sqrt{n}})$.

Depuis Ramanujan, la théorie a donc continué de se développer et elle est allée beaucoup plus loin.

On définit aujourd'hui ce qu'on appelle une «équation modulaire pour $R(q)$ » comme une équation impliquant $R(q)$ et, soit $R(-q)$, soit $R(q^n)$, pour une (ou plusieurs) valeur(s) entière(s) positive(s) de n . Ces équations élégantes ont été étudiées par Berndt (et al.) dans [Berndt 99].

On sait aussi que, dans son deuxième cahier, Ramanujan avait introduit le paramètre $k := R(q)R^2(q^2)$, et que, dans son cahier perdu, il avait révélé l'utilité d'un tel facteur en énonçant beaucoup de formules élégantes dans lesquelles k est impliqué. De telles formules sont également des équations modulaires désormais soigneusement étudiées.

D'une façon générale, il existe aujourd'hui une très grande variété de résultats supplémentaires sur $R(q)$, qui conduisent à des formules vraiment remarquables, lesquelles prouvent la fécondité des travaux de Ramanujan et posent, encore une fois, la difficile question de savoir comment ce mathématicien autodidacte a pu mettre la main sur de telles pépites et, en quelque manière, anticiper la direction qu'a prise ultérieurement la théorie des nombres.

Les propriétés et applications de $R(q)$ sont, en effet, innombrables et certaines ont eu, entre autres, des conséquences combinatoires, comme une série de formules enregistrées par Ramanujan dans son cahier perdu et prouvées, ultérieurement, par le mathématicien américain (né en 1938) George Eyre Andrews (voir [Andrews 81]), un éminent spécialiste de la théorie des nombres.

Parmi les développements bien connus auxquels ont donné lieu les travaux de Ramanujan inaugurés par la formule dont nous sommes partis, on peut encore citer, outre la formule de la «fraction continue de Rogers-Ramanujan» déjà mentionnée, certaines généralisations de $R(q)$ conduisant à une «fraction continue de Rogers-Ramanujan généralisée» qui se présente comme suit :

$$\frac{1}{1+} \frac{aq}{1+} \frac{aq^2}{1+} \frac{aq^3}{1+} \dots \quad (23)$$

Mais on sait, aujourd’hui, que cette fraction continue de Rogers-Ramanujan provient en fait de fractions continues beaucoup plus générales que les quotients de séries hypergéométriques de base auxquelles renvoient les exemples qu’il a donnés.

Notons encore, avec Berndt (et al.) (voir [Berndt 95]), comme une caractéristique particulière de l’esprit de Ramanujan, que celui-ci n’a jamais souscrit aux injonctions de Hardy qui, après avoir reçu ses deux premières lettres, lui suggérait de publier un article sur les fractions continues du type :

$$\frac{1}{1+} \frac{1}{x+} \frac{1}{x^2+} \frac{1}{x^3+} \dots$$

afin de donner une preuve complète de son théorème principal, et surtout montrer le plus remarquable, à savoir que la fraction peut être exprimée en termes finis lorsque $x = e^{-\pi\sqrt{n}}$, où n est rationnel. De fait, Ramanujan n’a jamais suivi le conseil de Hardy.

C’est seulement dans un article tardif, datant de 1919 (voir [Ramanujan 19] pp. 214-215), que celui-ci a pu donner une preuve des identités de Rogers-Ramanujan – formule (18) – et qu’il a également démontré, par la même occasion, la formule (17). Il est aussi significatif que Ramanujan n’ait jamais fait paraître d’autres résultats sur $R(q)$.

Bien que Ramanujan ait offert près de 200 résultats sur les fractions continues dans ses cahiers, on peut évidemment regretter que ce soit là le seul résultat qu’il ait publié sur la question, si l’on en excepte les quelques fractions continues qu’il a soumises comme problèmes au *Journal of the Indian Mathematical Society*.

Encore une fois, la manière dont il est parvenu à ses résultats de 1913 reste donc, en grande partie, une énigme.

5 Le problème de la formule (1)

Comme on l’a vu, c’est Rogers qui est, incontestablement, le premier à avoir formulé ce qui s’appellera un jour les identités de Rogers-Ramanujan, puisque son article

date de 1894. Mais Ramanujan, dans sa lointaine province indienne, ne pouvait absolument pas connaître ce travail. Il ne l'a découvert dans un vieux volume des *Proceedings* de la société mathématique de Londres qu'en 1917 (voir [Murty 13], p. 102), et Hardy rapporte d'ailleurs combien grande, alors, a été sa surprise et profonde son admiration pour cette œuvre inconnue de Rogers.

Jusque-là, Ramanujan, encore une fois, n'avait aucune preuve des formules qu'il avançait et, tout comme le cercle des mathématiciens éminents qui entourait Hardy, était incapable d'imaginer la moindre piste pour les démontrer, au point que certains de ses résultats avaient dû être publiés tels quels dans le second volume du livre de MacMahon sur l'analyse combinatoire (voir [MacMahon 16] chap. 3, p. 33 sq).

C'est seulement une fois découverts les travaux de Rogers que la correspondance qui s'ensuivit entre Rogers et Ramanujan permit de fournir ces preuves manquantes. Elle conduisit, dans un premier temps, à une simplification considérable de la preuve originale de Rogers, et, en 1919 (voir [Ramanujan 19]) Ramanujan en publia enfin une preuve différente, plus analytique. À peu près au même moment, Schur (voir [Schur 17]) avait lui-même redécouvert ces identités.

Ces convergences pourraient inciter à penser que les idées de Ramanujan étaient, comme on dit, «dans l'air du temps». Mais ceci n'explique pas, malgré tout, les intuitions prodigieuses dont il a fait preuve, ni comment il pouvait savoir que les formules qu'il proposait étaient «vraies», alors que, non seulement il ne les avait pas démontrées, mais surtout, il ne savait même pas comment il les avait lui-même produites.

6 Une démonstration de Ramanathan

Les travaux de Ramanujan apparaissent comme une série de résultats dispersés. En réalité, une sorte de fil rouge, presque invisible mais bien présent, les relie, comme il les relie aussi à l'histoire des mathématiques³

Indépendamment de la formule (1), cas particulier de la formule (11), Ramanujan a donné, pour ce que nous nommons désormais $R(q)$, de nombreux résultats, dont certains ont été discuté par Andrews (voir [Andrews 79] et [Andrews 81]) et d'autres se trouvent dans les papiers non publiés de Trinity College.

3. Beaucoup de résultats de Ramanujan sur les fractions continues semblent prendre leur source dans la formule limite de Kronecker. Voir là-dessus [Ramanathan 84²].

Dans les années 1980, le mathématicien indien Ramanathan a montré que la plupart des résultats de Ramanujan pouvaient s'expliquer par deux théorèmes qui se démontrent par des formules connues de Ramanujan qu'on trouve dans ses manuscrits. Nous nous limiterons ici à la démonstration de la formule dont nous sommes partis, mais Ramanujan a proposé aussi d'autres fractions continues, rencontrées indépendamment par Atle Selberg (voir [Selberg 36], et qui sont des cas particuliers d'une fraction continue générale de Ramanujan reconstituée par Andrews (voir [Andrews 79], une autre encore ayant été établie par Ramanathan lui-même.

Nous suivons ici la première partie de l'article de [Ramanathan 84¹].

Posons $\tau = \xi + i\eta$, $\eta > 0$ un paramètre du τ -demi plan supérieur complexe et soit $q = e^{\pi i \tau}$ de telle sorte que $|q| < 1$. Alors, la fraction continue :

$$R(q) = \frac{q^{1/5}}{1+} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \dots \quad (24)$$

converge.

D'après ses carnets, Ramanujan savait que :

$$R(q^2) = A(2\tau) = q^{2/5} \frac{\prod_1^\infty (1 - q^{2(5n-1)})(1 - q^{2(5n-4)})}{\prod_1^\infty (1 - q^{2(5n-2)})(1 - q^{2(5n-3)})} \quad (25)$$

et ses manuscrits inédits contiennent la preuve (ultérieurement publiée par Watson) que :

$$\frac{1}{A(2\tau)} - 1 - A(2\tau) = \frac{\eta(\tau/5)}{\eta(5\tau)} \quad (26)$$

où $\eta(\tau)$ est la forme modulaire de Dedekind :

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} \prod_1^\infty (1 - e^{2n\pi i \tau}). \quad (27)$$

La forme modulaire $\eta(\tau)$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$(\eta(1/\tau) = (-i\tau^{1/2}\eta(\tau), \quad (28)$$

où $i\tau^{1/2}$ est la branche positive pour un pur imaginaire $\tau = i\eta$, $\eta > 0$., la formule (28) ci-dessus se trouvant explicitement dans les carnets de Ramanujan, quoique sous une notation différente.

Posons maintenant :

$$\tau_0 = \frac{1}{2}(5 + \tau) \quad (29)$$

Alors :

$$A(2\tau_0) = R(e^{\pi i(5+\tau)}) = -\left(\frac{q^{1/5}}{1-} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1-} \frac{q^3}{1+} \dots\right) \quad (30)$$

Prenons maintenant $\tau = i\alpha$, $\alpha > 0$, de telle sorte que $A(i\alpha)$ et $\eta(i\alpha/5)/\eta(i5\alpha)$ sont tous deux réels et positifs. Si nous posons :

$$A = A(2i\alpha), \quad (31)$$

alors :

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - A\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + A\right) = \frac{\eta(i\alpha/5)}{\eta(i5\alpha)}.A. \quad (32)$$

D'où on déduit que :

$$0 < A(2i\alpha) < (\sqrt{5}-1)/2. \quad (33)$$

Choisissons alors deux nombres réels positifs α et β tels que $\alpha\beta = 1$. Si nous posons maintenant $B = A(2i\beta)$, nous obtenons :

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - A\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} - B\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + A\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + B\right) = \frac{\eta(i\alpha/5)\eta(i\beta/5)}{\eta(i5\alpha)\eta(i5\beta)}.AB. \quad (34)$$

Utilisant alors l'équation (28) et l'équation (34), nous obtenons :

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-A\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-B\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+A\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+B\right)=5AB. \quad (35)$$

Si nous posons encore :

$$a = A + \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad b = B + \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

l'équation (35) se réduit à :

$$ab(a - \sqrt{5})(b - \sqrt{5}) = 5\left(ab - \frac{\sqrt{5}+1}{2}(a+b) + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\right).$$

Et ceci mène à l'équation :

$$\left(ab - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \sqrt{5}\left(ab - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(a+b - 2\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right). \quad (36)$$

Or :

$$ab - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0. \quad (37)$$

En effet, d'après ce qui a été dit plus haut :

$$ab - \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{5}(a+b - \sqrt{5} - 1),$$

qui donne :

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-A\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-B\right) = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \quad (38)$$

Mais, par (33), le membre gauche de cet équation est tel que :

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-A\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-B\right) < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Au contraire, le membre droit de (38) est tel que :

$$\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Cette contradiction prouve l'équation (37).

On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Si α et β sont positifs et $\alpha\beta = 1$, alors :*

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{e^{-2\pi\alpha/5}}{1+} \frac{e^{-2\pi\alpha}}{1+} \frac{e^{-4\pi\alpha}}{1+} \dots\right) \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{e^{-2\pi\beta/5}}{1+} \frac{e^{-2\pi\beta}}{1+} \frac{e^{-4\pi\beta}}{1+} \dots\right) = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Un raisonnement assez similaire pourrait être fait pour $\bar{A} = -A(2\tau_0) = \frac{q^{1/5}}{1-} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1-} \frac{q^3}{1+} \dots$ en posant :

$$\bar{A} = \bar{A}(i\alpha), \quad \alpha > 0; \quad \bar{B} = \bar{B}(i\beta), \quad \beta > 0; \quad \alpha\beta = 1.$$

En changeant ce qui devrait être changé, on aboutirait alors à un théorème du même ordre :

Théorème 6.2. *Si α et β sont positifs et $\alpha\beta = 1$, alors :*

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{e^{-\pi\alpha/5}}{1+} \frac{e^{-\pi\alpha}}{1+} \frac{e^{-2\pi\alpha}}{1+} \dots\right) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{e^{-\pi\beta/5}}{1+} \frac{e^{-\pi\beta}}{1+} \frac{e^{-2\pi\beta}}{1+} \dots\right) = \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

On tire de ces théorèmes les formules non prouvées de Ramanujan, telles qu'il les a communiquées à Hardy dans ses deux lettres de 1913. Il suffit de poser $\alpha = \beta = 1$ dans les théorèmes 1 et 2. On obtient alors la formule (1) ou sa variante :

$$\frac{e^{-\pi/5}}{1-} \frac{e^{-\pi}}{1+} \frac{e^{-2\pi}}{1-} \frac{e^{-4\pi}}{1+} \dots = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (39)$$

L'adjonction de deux théorèmes supplémentaires, obtenus par les mêmes méthodes, permet également à Ramanathan de prouver la formule (22).

Au bilan, le mystère demeure : comment Ramanujan pouvait-il connaître de telles formules sans connaître aussi leurs démonstrations, sachant que ces démonstrations, précisément, supposent des calculs assez lourds et qui n'ont rien d'évidents...

7 Une explication possible

Selon Hardy, Ramanujan, qui possédait une connaissance intime des nombres, avait coutume de procéder de façon inductive, remontant d'exemples à des formules beaucoup plus abstraites dont il savait deviner la forme.

Dans un article publié récemment, le mathématicien indien Gaurav Bhatnagar s'est efforcé de montrer comment l'on pouvait, à partir d'exemples, conjecturer l'existence des identités de Rogers-Ramanujan, sans pour autant en posséder, au final, une preuve réelle.

Sa méthode est intéressante et mérite d'être examinée.

Bhatnagar suppose que Ramanujan est parti de l'approximation bien connue de ϕ , qu'il a immédiatement généralisée, à la mode de Rogers, en remplaçant la formule (9) par la formule (10), puis en évaluant les résultats finis successifs lorsqu'on tronque la fraction continue à un certain niveau.

Pour obtenir une récurrence, il suppose alors que Ramanujan a pu penser adjoindre à a un paramètre additionnel z , remplaçant la formule (10) par :

$$c(z, q) = 1 + \frac{zq}{1 + \frac{\frac{zq^2}{1 + \frac{zq^3}{1 + \frac{zq^4}{1 + \dots}}}}}, \quad (40)$$

ce qui conduit à la relation de récurrence :

$$c(z, q) = 1 + \frac{zq}{c(zq, q)} \quad (41)$$

7.1 Le membre «somme»

On pourrait alors conjecturer que le membre «somme» des relations de Rogers-Ramanujan aurait pu être reconstitué comme suit. Ramanujan aurait pu calculer de proche en proche la récurrence, en posant successivement :

$$c_0(z, q) = 1, \quad c_1(z, q) = 1 + \frac{zq}{1}, \quad c_2(z, q) = 1 + \frac{zq}{1 + \frac{zq^2}{1}} = 1 + \frac{zq}{1 + zq^2} = \frac{1 + zq + zq^2}{1 + zq^2},$$

$$c_3(z, q) = 1 + \frac{zq}{1 + \frac{\frac{zq^2}{1 + \frac{zq^3}{1}}}} = \frac{1 + zq(1 + zq^3)}{1 + zq^2 + zq^3} = \frac{1 + zq^2 + zq^3 + z^2q^4}{1 + zq^2 + zq^3},$$

$$c_3(z, q) = 1 + \frac{zq}{1 + \frac{\frac{zq^2}{1 + \frac{zq^3}{1 + \frac{zq^4}{1}}}}} = 1 + \frac{zq(1 + zq^3 + zq^4)}{1 + zq^2 + zq^3 + zq^4 + z^2q^6} = \frac{1 + zq^2 + zq^3 + zq^4 + z^2q^5 + z^2q^6}{1 + zq^2 + zq^3 + zq^4 + z^2q^6},$$

menant à la découverte d'une formule générale : en appelant le numérateur $H_n(z, q)$ et le dénominateur $H_{n-1}(zq, q)$, pour $n = 1, 2, 3, 4$, on obtient :

$$c(z, q) = \frac{H_n(z, q)}{H_{n-1}(zq, q)} = 1 + \frac{zqH_{n-2}(zq^2, q)}{H_{n-1}(zq, q)},$$

ce qui suggère la substitution :

$$c(z, q) = \frac{H(z, q)}{H(zq, q)}$$

dans la relation de récurrence (41), induisant :

$$H(z, q) = H(zq, q) + zqH(zq^2, q). \quad (42)$$

Pour résoudre cette relation de récurrence, il faut alors assumer que la solution doit être un développement en série de puissances du type :

$$H(z, q) = \sum_0^{\infty} a_k z^k.$$

Si la solution est réellement de cette forme, elle doit satisfaire la relation de récurrence. Substituons donc cette série dans (42). On obtient :

$$\sum_0^{\infty} a_k z^k = \sum_0^{\infty} a_k q^k z^k + \sum_0^{\infty} a_k q^{2k+1} z^{k+1}.$$

En comparant les coefficients de z^k de part et d'autre, on obtient, pour $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$a_k = a_k q^k + a_{k-1} q^{2k-1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a_k = \frac{q^{2k-1}}{1 - q^k} a_{k-1}$$

En itérant, on obtient :

$$a_k = \frac{q^{k^2}}{(1 - q)(1 - q^2)\dots(1 - q^k)} a_0.$$

En prenant $a_0 = 1$, on trouve finalement :

$$H(z, q) = \sum_0^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(1 - q)(1 - q^2)\dots(1 - q^k)} a_0 = \sum_0^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q; q)_k} z^k$$

avec $(q; k)_k = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^k)$.

Ce qui nous intéresse est $c(1, q)$, avec :

$$c(1, q) = \frac{H(1, q)}{H(q, q)},$$

c'est-à-dire, en d'autres termes :

$$1 + \frac{q}{1 + \frac{q^2}{1 + \frac{q^3}{1 + \frac{q^4}{1 + \dots}}}} = \frac{\sum_0^\infty \frac{q^{k^2}}{(q; k)_k}}{\sum_0^\infty \frac{q^{k^2+k}}{(q; q)_k}}. \quad (43)$$

Le membre «somme» de la fraction continue de Rogers-Ramanujan est donc le quotient de ces deux sommes.

7.2 Le membre «produit»

Repartons ici du numérateur du membre somme de l'identité de Rogers Ramanujan. Nous pouvons écrire que :

$$H(1, q) = 1 + \frac{q}{(1 - q)} + \frac{q^4}{(1 - q)(1 - q^2)} + \frac{q^9}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)} + \dots$$

Cette somme $H(1, q)$ est de la forme $1 + q + \dots +$ puissances supérieures de q . Nous voyons alors que, si nous multiplions chaque membre par $(1 - q)$, nous pouvons éliminer les deux premiers éléments du membre droit et simplifier les expressions suivantes, obtenant :

$$H(1, q)(1 - q) = \frac{q^4}{(1 - q^2)} + \frac{q^9}{(1 - q^2)(1 - q^3)} + \dots$$

Il est évident que nous pouvons recommencer l'opération en multipliant cette fois-ci les deux membres par $(1 - q^4)$. On aura alors :

$$H(1, q)(1-q)(1-q^4) = 1+q^6 + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^3)} + \dots = 1+q^6 + \dots \text{puissances supérieures de } q.$$

Et l'on peut continuer en multipliant cette fois-ci les deux membres par $(1 - q^6)$, etc.
Au final, on peut espérer avoir quelque chose comme :

$$H(1, q)(1 - q)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^9)(1 - q^{11})(1 - q^{14})\dots = 1.$$

Les nombres 1, 4, 6, 9, 11, 14, etc. indiquent que les puissances sont du type $5m + 1$ et $5m + 4$ pour $m = 0, 1, 2, 3$, etc. Aussi, nous pouvons conjecturer que :

$$H(1, q) = \sum_0^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q; k)_k} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5m+1})(1 - q^{5m+4})} \quad (44)$$

Une méthode similaire pour $H(q, q)$ conduit à un résultat comparable. On a :

$$H(q, q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^7)(1 - q^8)(1 - q^{12})(1 - q^{13})\dots = 1.$$

Et l'on peut alors conjecturer que :

$$H(q, q) = \sum_0^{\infty} \frac{q^{k^2+k}}{(q; q)_k} = \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{5m+2})(1 - q^{5m+3})} \quad (45)$$

Et les équations (44) et (45) sont précisément les relations de Rogers-Ramanujan.

8 Conclusion

La démarche de Bhatnagar, très différente des démonstrations de Watson comme de Ramanathan, a le mérite d'expliquer comment, sans qu'on en possède jamais la moindre preuve, on peut éventuellement conjecturer l'existence des relations de Rogers-Ramanujan. Elle est, de plus, d'une clarté étonnante. En même temps, on ne peut pas s'empêcher de penser qu'elle ne peut véritablement atteindre les relations cherchées que *parce que* celui qui se prête à cette reconstitution *connaît déjà* le résultat

qu'il veut atteindre, et choisit chaque fois la méthode qui lui permettra d'y parvenir. Au surplus, elle ne raisonne pas vraiment sur des exemples, mais suppose déjà un certain niveau d'abstraction qui n'a pas de correspondant dans les papiers laissés par Ramanujan, lesquels, se bornant à énoncer des formules concrètes (par exemple la formule de départ dont on est parti mettant en relation les constantes π , e et ϕ ne laissent supposer en aucune façon que Ramanujan était en possession de l'expression abstraite des relations dites de «Rogers-Ramanujan».

En ce sens, la reconstitution de Bhatnagar est presque trop belle pour être vraie, et il n'est donc pas certain du tout que Ramanujan ait procédé de cette façon pour découvrir les formules qu'il a présentées à Hardy dans ses fameuses lettres de 1913, bien que, très certainement, il ait procédé par induction à partir de la fraction continue approchant ϕ , et grâce à un «travail» purement inconscient qui ne laissait voir, au final, que le résultat.

Le fait est que Ramanujan était apparemment dans l'impossibilité d'exprimer clairement ses méthodes. Il se bornait à évoquer Namagiri, sa déesse inspiratrice, ce qui n'est évidemment pas une explication. Les procédés de calcul par lesquels il atteignait ses formules restent donc un mystère encore non élucidé, mais qu'il serait pourtant intéressant de percer pour comprendre l'affinité que peuvent avoir certains cerveaux avec les nombres et, plus généralement, certains êtres avec les mathématiques. Indépendamment de la question du cas Ramanujan (sa personnalité, ses capacités mathématiques ou son «génie» propre), cet aspect du problème serait intéressant à étudier, aussi bien d'un point de vue pédagogique que d'un point de vue cognitif.

Références

- [Andrews 79] Andrews, G. E., An introduction to Ramanujan's "Lost" notebook, *Amer. Math. Monthly* 86 (1979), pp. 89-108.
- [Andrews 81] Andrews, G. E., Ramanujan's "lost" notebook. III. The Rogers–Ramanujan continued fraction, *Adv. Math.* 41 (1981), 186–208.
- [Bhatnagar 15] Bhatnagar, G., How to Discover the Rogers–Ramanujan Identities, *Resonance*, 20 (no. 5), 416-430, (May 2015).
- [Berndt 95] Berndt, Bruce C., Rankin, Robert, A., *Ramanujan, letters and commentary*, American Mathematical Society, Providence, 1995. reprinted 1997.

- [Berndt 99] Berndt, B. C. ; Chan, H. H. ; Huang, S.-S. ; Kang, S.-Y. ; Sohn, J. ; and Son, S. H., The Rogers-Ramanujan Continued Fraction, *J. Comput. Appl. Math.* 105, 9-24, 1999.
- [Berndt 00] Berndt, B. C. ; Huang, S.-S. ; Sohn, J. ; and Son, S. H., Some Theorems on the Rogers-Ramanujan Continued Fraction in Ramanujan's Lost Notebook, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352, 2157-2177, 2000.
- [Hardy 1937] Hardy G.H., The Indian Mathematician Ramanujan, *Amer. Math. Monthly* 44 (1937), 137-155 ; reprinted in *Ramanujan/Twelve Lectures*, Cambridge University Press, 1940, pp. 1-21.
- [Lorentzen 92] Lorentzen L. et Waadeland, H., *Continued Fractions with Applications*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [MacMahon 16] MacMahon, P. A., *Combinatory analysis*, Volume 2, The University press, 1916.
- [Murty 13] Murty R. Ram et Murty V. Kumer, *The mathematical legacy of Srinivasa Ramanujan*, Springer India, New Dehli, 2013.
- [Ramanathan 84¹] Ramanathan, K. G., On Ramanujan's continued fraction, *Acta Arith.* 43 (1984) 209–226.
- [Ramanathan 84²] Ramanathan, K. G., On the Rogers-Ramanujan continued fraction, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* 93 (1984), 67-77.
- [Ramanujan 62] Ramanujan, S., *Collected Papers*, AMS, Chelsea, New York, 1962.
- [Ramanujan 57] *Notebooks* (2 volumes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [Ramanujan 89] *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa, New Delhi, 1988.
- [Ramanujan 19] Ramanujan, S., Proof of certain identities in combinatory analysis, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 19 (1919), 214–216.
- [Rogers 94] Rogers, L. J., Second memoir on the expansion of certain infinite products, *Proc. London Math. Soc.* 25 (1894), 318–343.
- [Schur 17] Schur, I, Ein Beitrag zur Additiven Zahlentheorie, Sitzungsber., *Akad. Wissensch. Berlin*, Phys.-Math. Klasse (1917), 302–321.
- [Selberg 36] Selberg, A., Über einige arithmetisch Identitäten, *Avhandlingar. uttgitt. Xerske. Vid. Akademi.*, No 8., Oslo 1936, 23p.
- [Watson 29¹] Watson, G.N., Theorems stated by Ramanujan (VII) : Theorems on continued fractions, *J. London Math. Soc.* 4 (1929), 39-48.

[Watson 29²] Watson, G. N., Theorems stated by Ramanujan (IX) : Two continued fractions, *J. London Math. Soc.* 4 (1929), 231-237.